1.1. Pozycyjne systemy liczbowe

Systemami liczenia nazywa się sposób tworzenia liczb ze znaków cyfrowych oraz zbiór reguł umożliwiających wykonywanie operacji arytmetycznych na liczbach. Dla dowolnego systemu liczenia istnieje zbiór cyfr, z których tworzy się liczby. Systemy liczenia dzielą się na pozycyjne i niepozycyjne. W systemach niepozycyjnych poszczególne cyfry zachowują swą wartość liczbową bez względu na miejsce, jakie zajmują w liczbie. Przykładem takiego systemu jest system rzymski.

Systemy, w których wartość liczbowa cyfry zależy od jej umiejscowienia (pozycji) w liczbie, nazywają się systemami pozycyjnymi. Ilość różnych cyfr systemu nazywa się jego podstawą. Wartość liczbowa cyfry w systemie pozycyjnym określona jest przez wagę pozycji zależną od numeru pozycji. Zwykle stosuje się taki zapis liczb, w którym wagi cyfr wzrastają od prawej do lewej strony zbioru cyfr stanowiącego liczbę. Waga każdej pozycji jest P-krotnie większa od wagi pozycji poprzedniej (P- podstawa systemu). Waga pozycji " i" równa jest podstawie podniesionej do potęgi " i".

Przykład:

Liczbę 141,89 w systemie dziesiętnym (decymalnym) można zapisać w postaci następujących sum iloczynów:

$141{,}89= 1*10^2 + 4*10^1 + 1*10^0 + 8*10^{-1} + 9*10^{-2}$

podstawa P=10 cyfry C= 0, 1, 2, ... 9

W celu technicznego przedstawienia liczby należy dysponować elementami mogącymi znajdować się w tylu wyróżnionych stanach, ile różnych cyfr może w danym systemie wystąpić. Każdemu z tych stanów przyporządkowana jest jedna cyfra. Z punktu widzenia prostoty rozwiązań technicznych najwygodniejszy jest system dwójkowy, zawierający dwie różne cyfry.

Niezawodność działania urządzeń liczących związana jest z różnorodnością symboli przypisywanych poszczególnym znakom cyfrowym. Możliwość przekłamań jest tym większa, im więcej różnych znaków dane urządzenie musi rozróżnić.

1.2. Naturalny system dwójkowy (binarny) - kod NB

P=2 C=0, 1

Cyfra dwójkowa 0 lub 1 nazywa się bitem. Bajt to grupa ośmiu bitów.

Algorytm zamiany liczby binarnej z systemu dwójkowego na system dziesiętny:
Liczba binarna **c** w systemie dziesiętnym gdzie $\mathbf{n_i = c_i * 2_i}$ przyjmuje wartość:

$$(c_i \ldots c_1 c_0)_{(nb)} = c_i*2^i + \ldots + c_1*2^1 + c_0*2^0 = n_i + \ldots + n_1 + n_0 = n_{(10)}$$

Zapis liczby całkowitej w naturalnym kodzie binarnym NB - przykład:

$110011_{NB} = 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 32+16+2+1= 51_{10}$

Wagi każdej starszej pozycji wzrastają dwukrotnie w stosunku do pozycji młodszej i wynoszą 1, 2, 4, 8, 16, 32. Suma wag wszystkich pozycji młodszych jest o 1 mniejsza od wagi pozycji starszej np: 1+2+4+8= 16-1.

W celu przekształcenia liczby dziesiętnej na dwójkową należy kolejno dzielić ją przez 2, zapisując kolejne reszty z tego dzielenia , aż do uzyskania reszty mniejszej od 2. Reszty te stanowią kolejne cyfry dwójkowe reprezentacji liczby. Ostatnia reszta stanowi najstarszą pozycję liczby dwójkowej.

Algorytm zamiany liczby naturalnej z systemu dziesiętnego na system dwójkowy:

Liczba naturalna n w systemie dwójkowym przyjmuje postać:
$\mathbf{c_i \ldots c_1 c_0}$ gdzie $\mathbf{c_i}$ przyjmuje wartość **1** lub **0**
Liczbę dziesiętną n oblicza się wg wzoru:
$\mathbf{n = c_i*2^i + \ldots + c_1*2^1 + c_0*2^0}$

Przykład:

Liczba 83 w systemie dwójkowym:
83 : 2 1
41 : 2 1
20 : 2 0
10 : 2 0
5 : 2 1
2 : 2 0
1 : 2 1

$83_{10} = 1010011_{NB}$

Liczba 21 w systemie dwójkowym:

21 : 2	1	c0
10 : 2	0	c1
5 : 2	1	c2
2 : 2	0	c3
1 : 2	1	c4
0 : 2	0	c5

$21_{10} = 010101_{NB}$
Zera przed jedynką z lewej nie mają wpływu na wartość liczby

1.3. System szesnastkowy (heksadecymalny)

P=16 C= 0, 1, 2, ... 9, A, B, C, D, E, F

Przykłady zapisu liczb heksadecymalnych:

$11_{16} = 1 * 16^1 + 1 * 16^0 = 17_{10}$

$C9_{16} = 12 * 16^1 + 9 * 16^0 = 201_{10}$

$(4F)_{16} = 4 * 16^1 + 15 * 16^0 = (79)_{10}$

Za pomocą liczb heksadecymalnych można w prosty sposób zapisywać długie liczby binarne.

Grupa 4 bitów może być zapisana za pomocą jednej cyfry heksadecymalnej zgodnie z następującą tabelą:

System D	System B	System H
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3

4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Liczbę dwójkową dzielimy na grupy , każda po 4 bity począwszy od najmłodszego bitu np.:

$1100110_{NB}= 66_{16}$

Przekształcenie odwrotne: $3A8_{16}= 1110101000_{NB}$

Jeden bajt może być przedstawiony za pomocą dwóch liczb heksadecymalnych od 0 do FF.

$FF_{16}= 255_{10}= 11111111_{16}$

1.4. Kod z uzupełnieniem do dwóch - U2

Kod U2 jest najczęściej spotykanym w obliczeniach na liczbach całkowitych ze znakiem. Umożliwia w jednoznaczny sposób zapisywanie liczb binarnych ujemnych. W kodzie U2 waga najstarszego bitu jest zawsze ujemna np:

$1001_{U2}= -2^3* 1 + 0* 2^2 + 0* 2^1 + 1* 2^0= -7_{10}$

$0110_{U2}= -2^3* 0 + 1* 2^2 + 1* 2^1 + 0* 2^0= 6_{10}$

Liczbę ujemną w kodzie U2 zapisuje się następująco:

<u>-a = a' + 1</u>

gdzie sumę arytmetyczną bitów oblicza się wg algorytmu:

0+0=1

0+1=1

1+0=1

1+1=10

Przykład:

$a= 01010_{U2}= 1010_{NB}= 10_{10}$

$-a= 10101+1= 10110_{U2}= -16+4+2= -10_{10}$

Wnioski: Najbardziej znaczący bit liczby w kodzie U2 zawiera informację o znaku tej liczby. Jeśli bit ten jest równy 1, to liczba jest ujemna, a jeśli równy zero, to liczba jest dodatnia. Liczby dodatnie w kodzie NB i U2 zapisuje się identycznie.

1.5. Kod BCD

Jest to kod dziesiętno- dwójkowy i wymaga zastosowania grup 4 bitowych dla każdej cyfry dziesiętnej np.:

$137_{10}= 000100110111_{BCD}$

Zapis w kodzie BCD jest idealny, jeśli chce się wyświetlać liczby dziesiętne, wszystko co trzeba zrobić, to zamienić każdą 4 bitową grupę BCD na odpowiadającą jej cyfrę dziesiętną i ją wyświetlić. Zapis BCD jest powszechnie używany do wprowadzania i wyprowadzania informacji numerycznej.

1.6. Kod Graya

W kodzie Graya przy przejściach od jednego do drugiego stanu zmienia się tylko jeden bit. Aby uzyskać następny stan, zmienia się zawsze pojedynczy, najmniej znaczący bit, którego zmiana daje nowy stan.

kod NB	kod Graya
0000	0000
0001	0001
0010	0011
0011	0010
0100	0110
0101	0111
0110	0101
0111	0100
1000	1100
1001	1101
1010	1111
1011	1110
1100	1010
1101	1011
1110	1001
1111	1000

Kody Graya mogą być generowane dla dowolnej liczby bitów. Są stosowane w mechanicznych przetwornikach kąt- cyfra (dekoderach kąta obrotu wału), przetwornikach A/C.

1.7. Kody "1 z n"

Najbardziej rozpowszechnionym kodem o stałej liczbie jedynek jest kod "1 z 10" zwany kodem pierścieniowym. Jest to kod wagowy o wagach 9876543210.

cyfra	kod "1 z 10"
0	000000000**1**
1	00000000**1**0
2	0000000**1**00
3	000000**1**000
4	00000**1**0000
5	0000**1**00000
6	000**1**000000
7	00**1**0000000
8	0**1**00000000
9	**1**000000000