Obliczanie liczby π metodą Monte-Carlo

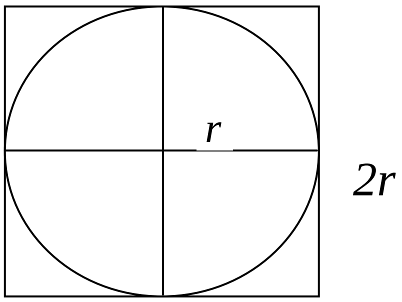
Zakres ćwiczenia

Ćwiczenie obecne podzielone jest na dwie części. Celem pierwszej części ćwiczenia podniesienie umiejętności w zakresie stosowania dotąd nabytej wiedzy. Tak więc w tej części ćwiczenia nie zostaną wprowadzone żadne nowe funkcje biblioteki PVM. Zostanie przedstawiona metoda wyliczania liczby π, która stosunkowo dobrze nadaje się do zrównoleglenia. W drugiej części zostanie przedstawiony sposób użycia wielu buforów komunikacyjnych w środowisku PVM.

Opis metody Monte-Carlo obliczania liczby π

Liczbę π można obliczać na wiele różnych sposobów. Sposób, który podamy obecnie nie jest bynajmniej najlepszym z nich – głównym motywem wybrania właśnie jego jest tzw. cel dydaktyczny. Metoda Monte-Carlo, z którą zaraz się zapoznasz, jest dość łatwa do zrozumienia oraz dobrze daje się ją zrównoleglić, co czyni ją idealną do wszelkiego rodzaju kursów programowania w środowisku rozproszonym i tradycyjnie pojawia się w wielu ćwiczeniach uczących programowania w Ada95, PVM czy też MPI.

Obejrzyj teraz rysunek poniżej. Przedstawia on koło o promieniu *r* wpisane w kwadrat o boku *2r*.



Rysunek 1 Koło wpisane w kwadrat

Gdybym zadał ci teraz pytanie, ile wynosi pole przedstawionego wyżej kwadratu, na pewno odpowiedziałbyś bez wahania $4r^2$. Pole koła zaś wynosi πr^2. Oznacza to, że stosunek pola koła do pola kwadratu wynosi:

$$\frac{P_{kola}}{P_{kwadrat}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \tag{6.1}$$

Z tego z kolei wynika, że mając obliczone wcześniej w jakiś sposób pole kwadratu i pole koła wpisanego w ten kwadrat, możemy łatwo obliczyć π:

$$\pi = 4\frac{P_{kola}}{P_{kwadrat}} \tag{6.2}$$

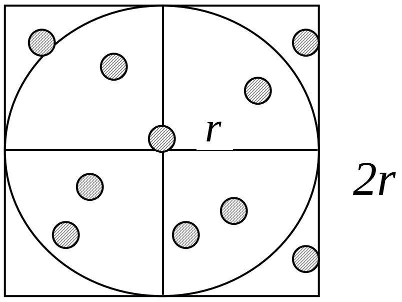
Ta konstatacja być może wywołała na twojej twarzy uśmiech. W końcu, żeby obliczyć pole koła, musimy znać π, mógłbyś powiedzieć. Owszem, to prawda. Ale istota metody Monte-Carlo polega na tym, że możemy zastosować powyższą równość bez obliczania pola koła.

Wyobraź sobie teraz, że rzucamy ziarenkami piasku w narysowany kwadrat z zakreślonym w środku kołem. Zgodzisz się chyba z stwierdzeniem, że jeśli będziemy rzucali dostatecznie długo, w końcu ziarnka piasku pokryją cały kwadrat, a stosunek liczby ziarenek piasku w środku narysowanego koła w stosunku do wszystkich ziarenek piasku w całym kwadracie będzie równy mniej więcej stosunkowi pola koła do pola kwadratu. Bardziej formalnie możemy ten wniosek ubrać w słowa w następujący sposób:

Jeżeli będziemy losować punkty o współrzędnych od *–2r* do *2r*, to stosunek liczby punktów zawierających się w kole o środku w punkcie <0,0> i promieniu *r* do wszystkich wylosowanych punktów będzie dążył w nieskończoności (z pewnym prawdopodobieństwem) do stosunku tego pola koła do koła kwadratu o boku *2r*.

Co więcej, stosunek ten będzie identyczny również do ćwiartki koła. Jeżeli pole koła podzielimy na cztery i tak samo podzielimy pole kwadratu, to ich stosunek będzie wciąż taki sam. Oznacza to, że wystarczy, jeżeli będziemy losowali punkty o współrzędnych od 0 do *r*.

Cała metoda sprowadza się więc do tego, by losować punkty, sprawdzać, czy mieszczą się w kole, i następnie podstawiać liczby wylosowanych punktów do wzoru 6.2. Losując **odpowiednio dużo** punktów, powinniśmy otrzymać z pewnym prawdopodobieństwem rozsądne przybliżenie liczby π.



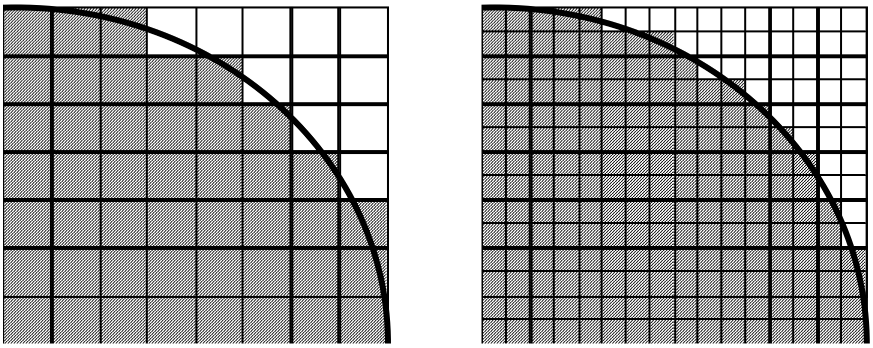
Rysunek 2 Przykład losowania punktów w metodzie Monte-Carlo

Powyżej znajduje się prosty przykład. Wylosowano 10 punktów, z czego 3 znalazły się poza kołem. Widać z tego, że przybliżenie π wyniosło 4*7/10=2.8, co jest wprawdzie dość odległe od prawdy, ale pokazuje ogólną ideę – im więcej będzie punktów, tym przybliżenie π bliższe faktycznej wartości 3,14159265358979323846264338327950....

Oczywiście, metoda Monte-Carlo jest *losowa*, co oznacza, że można otrzymać wyniki raz lepsze, raz gorsze w zależności od uruchomienia a powyższe wartości można uznać za wyjątkowo dobre, biorąc pod uwagę podane parametry.

Aby otrzymać dobre rozwiązanie, należy zwrócić uwagę na kilka kwestii.

Im większe *r*, tym większa rozdzielczość losowania i większa szansa na dobre przybliżenie liczby π. Wynika to z tego, że operując na współrzędnych-liczbach całkowitych w gruncie rzeczy nie badamy prawdziwego koła, a jedynie pewne jego przybliżenie. Problem ten ilustruje rysunek poniżej.



Rysunek 3 Przybliżenia koła o promieniu *r*=8 oraz *r*=16 dla całkowitych współrzędnych

Na rysunku narysowano wycinek koła o promieniu *r* równym 8. Widać, że jeżeli losujemy tylko współrzędne całkowite, w gruncie rzeczy otrzymamy tylko pewne przybliżenie koła (obszar zakreskowany). Przybliżenie to będzie tym bardziej „koliste”, im większe *r*,

Im więcej punktów, tym lepsze przybliżenie liczby π - jest to prawdą, ale tylko do pewnego stopnia. Jeżeli punktów jest za dużo w stosunku do promienia *r*, to przestajemy się zbliżać do właściwej wartości 3.14159... a rozwiązanie może się zacząć pogarszać. Wynika to z tego, że zaczynamy w końcu ponownie losować te same punkty. Jeżeli wybierzemy *r* równe 100, to nie ma sensu losować więcej niż 10000 punktów.